Inférence semi-paramétrique pour des évènements récurrents en présence de censures et d'un évènement terminal

Olivier Bouaziz[1], Ségolen Geffray[2] et Olivier Lopez[3]

[1] MAP5 ,[2] Université de Strasbourg, Irma, [3] Laboratoire de Statistique Théorique et Appliquée

Paris V, 08-10-10

Plan

1. Introduction
2. Présentation du contexte
3. Méthode d'estimation
4. Résultats asymptotiques
5. Simulations

Le fléau de la dimension

- Soient $X \in \mathbb{R}^d$ et $Y \in \mathbb{R}$.
- Soit $m(x) = \mathbb{E}[Y|X = x]$. On suppose que m possède des dérivées partielles jusqu'à l'ordre β, toutes continues.
- Soit $\hat{m}$ un estimateur de m.

Vitesse de convergence optimale

$$\sup_x \mathbb{E}\left[\left(\hat{m}(x) - m(x)\right)^2\right] = O\left(n^{-\frac{2\beta}{2\beta+d}}\right).$$

En pratique : problème d'estimation dès que $d \geq 3$.

Modèles de réduction de la dimension

Modèle de régression linéaire

$$\mathbb{E}[Y|X] = \theta_0' X$$

où $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ est inconnu.

Modèles de réduction de la dimension

Modèle de régression linéaire généralisé

$$\mathbb{E}[Y|X] = g(\theta_0' X)$$

où $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ est inconnu et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est connu.

Modèles de réduction de la dimension

Modèle à direction révélatrice unique

$$\mathbb{E}[Y|X] = g(\theta_0' X),$$

où $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont inconnus.

Modèles de réduction de la dimension

Modèle à direction révélatrice unique (SIM)

$$\mathbb{E}[Y|X] = g(\theta_0' X),$$

où $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont inconnus.

On a :

$$\mathbb{E}[Y|\theta_0' X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]|\theta_0' X] = g(\theta_0' X).$$

Autre écriture du SIM

$$\mathbb{E}[Y|X] = g(\theta_0' X) = \mathbb{E}[Y|\theta_0' X],$$

où $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ et g sont inconnus.

Plan

1. Introduction
2. Présentation du contexte
3. Méthode d'estimation
4. Résultats asymptotiques
5. Simulations

Introduction

- Etude clinique : pour $1 \leq i \leq n$,
  - D_i : durée de vie du patient i (en général censurée à droite).
  - X_i : vecteur de variables explicatives (âge, type de traitement...).
  - $N_i^*(t)$: nombre d'évènements récurrents du patient i survenant dans l'intervalle $[0, t]$, pour $t \in [0, D_i]$.
- Exemples d'évènements récurrents :
  - Crises d'asthme pour des patients asthmatiques,
  - Crises d'épilepsie pour des patients épileptiques,
  - Infections pour des patients atteints du VIH, ...

Observations

- On s'intéresse à $N^*(t)$, $t \geq 0$.
- On observe : $\begin{cases} T = D \wedge C \\ \delta = \mathbb{1}_{D \leq C} \\ X \in \mathscr{X} \subset \mathbb{R}^d \\ N(t) = N^*(t \wedge C) \end{cases}$

Problématique

On veut estimer : $\mu(t|x) := \mathbb{E}[N^*(t)|X = x]$.

Modèles paramétriques et non-paramétriques

- Modèle paramétrique :

$$\mu(t|x) = \mu_0(t, x; \theta_0),$$

où μ_0 est connue et $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ est inconnu.

- Exemple de modèle paramétrique :

$$\mu(t|x) = t\theta_0' x,$$

hypothèse satisfaite si N^* est un processus de Poisson d'intensité $\theta_0' X$.

- Modèle non-paramétrique : on estime directement $\mu(t|x)$ sans hypothèses sur la fonction. Problème : fléau de la dimension dès que $d \geq 3$.

Modèles semi-paramétriques

- Approche intermédiaire : modèle semi-paramétrique de réduction de la dimension.

Exemples de modèles semiparamétriques :

- Le « modèle de Cox »

$$\mu(t|x) = \mu_0(t)e^{\theta_0' x},$$

où $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ et μ_0 sont inconnus.

Modèles semi-paramétriques

- Approche intermédiaire : modèle semi-paramétrique de réduction de la dimension.

Exemples de modèles semiparamétriques :

- Le « modèle de Cox »

$$\mu(t|x) = \mu_0(t)e^{\theta_0' x},$$

où $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ et μ_0 sont inconnus.

Modèles semi-paramétriques

- Le modèle AFT (Accelerated Failure Time) :

$$\mu(t|x) = \mu_0\left(t\exp(\theta_0' x)\right).$$

- Le modèle à direction révélatrice unique :

Hypothèse S.I.M

$$\mu(t|x) = \mu_{\theta_0}(t, \theta_0' x),$$

où $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ et $\mu_\theta(t,u) = \mathbb{E}[N^*(t)|\theta' X = u]$ sont inconnus.

Modèles semi-paramétriques

- Le modèle AFT (Accelerated Failure Time) :

$$\mu(t|x) = \mu_0\left(t\exp(\theta_0'x)\right).$$

- Le modèle à direction révélatrice unique :

Hypothèse S.I.M

$$\mu(t|x) = \mu_{\theta_0}(t, \theta_0'x),$$

où $\theta_0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ et $\mu_\theta(t,u) = \mathbb{E}[N^*(t)|\theta'X = u]$ sont inconnus.

Quelques hypothèses

On définit $G(t) = \mathbb{P}(C \leq t)$, $H(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ et $\tau_H = \inf(t : H(t) = 1)$.

Hypothèses du modèle

(i) $C \perp\!\!\!\perp (N^*, D)$,

(ii) $\mathbb{P}(C \leq t \,|\, N^*, D, X) = \mathbb{P}(C \leq t \,|\, N^*, D)$ pour tout $t \in [0, \tau_H]$,

(iii) il n'y a pas d'ex-aequo entre décès, censure ou l'apparition d'un évènement récurrent.

Cas particulier où (i) et (ii) sont vraies : $C \perp\!\!\!\perp (N^*, D, X)$.

Plan

1. Introduction
2. Présentation du contexte
3. Méthode d'estimation
4. Résultats asymptotiques
5. Simulations

Méthode d'estimation

- On introduit le processus, pour $t \leq \tau_H$:

$$Z(t) := \int_0^t \frac{dN(s)}{1 - G(s-)}.$$

Méthode d'estimation

- On introduit le processus, pour $t \leq \tau_H$:

$$Z(t) := \int_0^t \frac{dN(s)}{1 - G(s-)}.$$

On a :

$$\mathbb{E}[dN(s)|X] = \mathbb{E}\left[dN^*(s \wedge C)|X\right]$$

Méthode d'estimation

- On introduit le processus, pour $t \leq \tau_H$:

$$Z(t) := \int_0^t \frac{dN(s)}{1 - G(s-)}.$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[dN(s)|X] &= \mathbb{E}\big[dN^*(s \wedge C)|X\big] \\ &= \mathbb{E}\big[dN^*(s)\mathbb{1}_{s\leq C}|X\big] + \mathbb{E}\big[dN^*(C)\mathbb{1}_{s>C}|X\big]\end{aligned}$$

Méthode d'estimation

- On introduit le processus, pour $t \leq \tau_H$:

$$Z(t) := \int_0^t \frac{dN(s)}{1 - G(s-)}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[dN(s)|X] &= \mathbb{E}\Big[dN^*(s \wedge C)|X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[dN^*(s)\mathbb{1}_{s \leq C}|X\Big] + \mathbb{E}\Big[dN^*(C)\mathbb{1}_{s > C}|X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\,\mathbb{E}\big[dN^*(s)\mathbb{1}_{s \leq C}|N^*, D, X\big]\,\big|\,X\Big]
\end{aligned}$$

Méthode d'estimation

- On introduit le processus, pour $t \leq \tau_H$:

$$Z(t) := \int_0^t \frac{dN(s)}{1 - G(s-)}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[dN(s)|X] &= \mathbb{E}\Big[dN^*(s \wedge C)|X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[dN^*(s)\mathbb{1}_{s \leq C}|X\Big] + \mathbb{E}\Big[dN^*(C)\mathbb{1}_{s > C}|X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\,\mathbb{E}\big[dN^*(s)\mathbb{1}_{s \leq C}|N^*, D, X\big]\Big|X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[dN^*(s)\,\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{s \leq C}|N^*, D\big]\Big|X\Big]
\end{aligned}$$

Méthode d'estimation

- On introduit le processus, pour $t \leq \tau_H$:

$$Z(t) := \int_0^t \frac{dN(s)}{1 - G(s-)}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[dN(s)|X] &= \mathbb{E}\Big[dN^*(s \wedge C)|X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[dN^*(s)\mathbb{1}_{s\leq C}|X\Big] + \mathbb{E}\Big[dN^*(C)\mathbb{1}_{s>C}|X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\,\mathbb{E}\big[dN^*(s)\mathbb{1}_{s\leq C}|N^*, D, X\big]\,\big|\,X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[dN^*(s)\,\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{s\leq C}|N^*, D\big]\,\big|\,X\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[dN^*(s)|X\Big]\big(1 - G(s-)\big).
\end{aligned}$$

Méthode d'estimation

Proposition

Sous nos hypothèses :

$$\mathbb{E}[Z(t)|X] = \mathbb{E}[N^*(t)|X] = \mu_{\theta_0}(t, \theta_0' X)$$

- On estime $Z(t)$ par :

$$\hat{Z}(t) := \int_0^t \frac{dN(s)}{1 - \hat{G}(s-)},$$

où $\hat{G}$ est l'estimateur de Kaplan-Meier de G,

$$\hat{G}(t) = 1 - \prod_{i:T_i \leq t} \left(1 - \frac{1}{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{T_j \geq T_i}}\right)^{1-\delta_i}.$$

Méthode d'estimation

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\left[\left(Z(t)-\mu_\theta(t,\theta'X)\right)^2\right]\\ &= \arg\min_{\theta\in\Theta} \mathbb{E}\left[\mu_\theta(t,\theta'X)^2\right] - 2\mathbb{E}\left[Z(t)\mu_\theta(t,\theta'X)\right].\end{aligned}$$

Estimateur de θ_0

$$\hat\theta = \arg\min_{\theta\in\Theta} M_{n,w}(\theta,\mu_\theta),$$

$$\begin{aligned}\text{où } M_{n,w}(\theta,\hat\mu_\theta) &= n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_{(n)}} \hat\mu_\theta(t,\theta'X_i)^2 dw(t)\\ &\quad - 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_{(n)}} \hat Z_i(t)\hat\mu_\theta(t,\theta'X_i)dw(t).\end{aligned}$$

Méthode d'estimation

$$\theta_0 = \arg\min_{\theta\in\Theta} \int_0^{\tau_H} \mathbb{E}\left[\left(Z(t) - \mu_\theta(t,\theta' X)\right)^2\right] dw(t)$$
$$= \arg\min_{\theta\in\Theta} \int_0^{\tau_H} \mathbb{E}\left[\mu_\theta(t,\theta' X)^2\right] dw(t) - 2\int_0^{\tau_H} \mathbb{E}\left[Z(t)\mu_\theta(t,\theta' X)\right] dw(t).$$

Estimateur de θ_0

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} M_{n,w}(\theta,\mu_\theta),$$

où $M_{n,w}(\theta,\hat{\mu}_\theta) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_{(n)}} \hat{\mu}_\theta(t,\theta' X_i)^2 dw(t)$
$$- 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_{(n)}} \hat{Z}_i(t)\hat{\mu}_\theta(t,\theta' X_i) dw(t).$$

Méthode d'estimation

$$\theta_0 = \arg\min_{\theta\in\Theta} \int_0^{\tau_H} \mathbb{E}\left[\left(Z(t) - \mu_\theta(t,\theta' X)\right)^2\right] dw(t)$$
$$= \arg\min_{\theta\in\Theta} \int_0^{\tau_H} \mathbb{E}\left[\mu_\theta(t,\theta' X)^2\right] dw(t) - 2\int_0^{\tau_H} \mathbb{E}\left[Z(t)\mu_\theta(t,\theta' X)\right] dw(t).$$

Estimateur de θ_0

$$\hat\theta = \arg\min_{\theta\in\Theta} M_{n,w}(\theta,\mu_\theta),$$

où $M_{n,w}(\theta,\hat\mu_\theta) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_{(n)}} \hat\mu_\theta(t,\theta' X_i)^2 dw(t)$

$$- 2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_{(n)}} \hat Z_i(t)\hat\mu_\theta(t,\theta' X_i) dw(t).$$

Un estimateur de μ_θ

- Sous nos hypothèses, on a la relation :

$$\mu_\theta(t,u) = \int_0^t \frac{\mathbb{E}[dN(s)|\theta' X = u]}{1 - G(s-)}.$$

Estimateur de μ_θ

$$\hat{\mu}_{\theta,h}(t,u) = \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{u-\theta' X_i}{h}\right) dN_i(s)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{u-\theta' X_j}{h}\right)[1 - \hat{G}(s-)]}.$$

Un estimateur de μ_θ

- Sous nos hypothèses, on a la relation :

$$\mu_\theta(t,u) = \int_0^t \frac{\mathbb{E}[dN(s)|\theta' X = u]}{1 - G(s-)}.$$

Estimateur de μ_θ

$$\hat{\mu}_{\theta,h}(t,u) = \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{u-\theta' X_i}{h}\right) dN_i(s)}{\sum_{j=1}^n K\left(\frac{u-\theta' X_j}{h}\right)[1 - \hat{G}(s-)]}.$$

Plan

1. Introduction
2. Présentation du contexte
3. Méthode d'estimation
4. **Résultats asymptotiques**
5. Simulations

Hypothèses sur $\hat{\mu}_\theta$

Hypothèses de convergence

On suppose,

$$\sup_{t \leq T_{(n)}, \theta, x} |\hat{\mu}_\theta(t, \theta' x) - \mu_\theta(t, \theta' x)| = o_P(1),$$

$$\sup_{t \leq T_{(n)}, \theta, x} \|\nabla_\theta \hat{\mu}_\theta(t, x) - \nabla_\theta \mu_\theta(t, x)\| = o_P(1),$$

$$\sup_{t \leq T_{(n)}, \theta, x} \|\nabla^2_\theta \hat{\mu}_\theta(t, x) - \nabla^2_\theta \mu_\theta(t, x)\| = o_P(1),$$

$$\sup_{t \leq T_{(n)}, x} |\hat{\mu}_{\theta_0}(t, \theta_0' x) - \mu_{\theta_0}(t, \theta_0' x)| \cdot \|\nabla_\theta \hat{\mu}_{\theta_0}(t, x) - \nabla_\theta \mu_{\theta_0}(t, x)\|$$
$$= o_P(n^{-1/2}).$$

Résultats principaux

Soient

$$S_n(f,w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau_H} Z_i(t)f(X_i,t)dw(t)$$

et

$$\hat{S}_n(f,w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{T_{(n)}} \hat{Z}_i(t)f(X_i,t)dw(t).$$

Lemme 1

$$\hat{S}_n(f,w) - S_n(f,w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\tau_H} \eta_t(T_i,X_i,\delta_i)dw(t) + R_n(f,w),$$

où les $\eta_t(T_i,X_i,\delta_i)$ sont i.i.d de moyenne nulle et $\sup_{w,f}\|R_n(f,w)\| = o_P(n^{-1/2})$.

Résultats principaux

Lemme 2

Soit $\hat{f}$ un estimateur de f tel que $\sup_f \|\hat{f} - f\| = o_P(1)$, alors

$$\sup_{w} \|\hat{S}_n(\hat{f}, w) - S_n(\hat{f}, w)\| = o_P(n^{-1/2}).$$

Théorème

$\sqrt{n}(\hat{\theta}(\cdot) - \theta_0)$ converge vers un processus gaussien, en particulier, pour tout w appartenant à une certaine classe de mesures,

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}(w) - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \Sigma_w).$$

Choix adaptatif de w

- On prend un ensemble fini de mesures : $\mathscr{W}$
- Critère asymptotique :
- Alors $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{w})$.
- On a toujours :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}(\hat{w}) - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \Sigma_{w_{\text{opt}}})$$

où $\Sigma_{\hat{w}}$ converge vers $\Sigma_{w_{\text{opt}}}$.

Choix adaptatif de w

- On prend un ensemble fini de mesures : $\mathscr{W}$
- Critère asymptotique :

- Alors $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{w})$.
- On a toujours :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}(\hat{w}) - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \Sigma_{w_{\text{opt}}})$$

où $\Sigma_{\hat{w}}$ converge vers $\Sigma_{w_{\text{opt}}}$.

Choix adaptatif de w

- On prend un ensemble fini de mesures : $\mathscr{W}$
- Critère asymptotique :

$$\lim_{n} \mathbb{E}\left[\|\hat{\theta}(w) - \theta_0\|^2\right]$$

- Alors $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{w})$.
- On a toujours :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}(\hat{w}) - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \Sigma_{w_{\text{opt}}})$$

où $\Sigma_{\hat{w}}$ converge vers $\Sigma_{w_{\text{opt}}}$.

Choix adaptatif de w

- On prend un ensemble fini de mesures : $\mathscr{W}$
- Critère asymptotique :

$$\hat{w} = \arg\min_{w \in \mathscr{W}} \lim_{n} \hat{\mathbb{E}} \left[\left\| \hat{\theta}(w) - \theta_0 \right\|^2 \right]$$

- Alors $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{w})$.
- On a toujours :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}(\hat{w}) - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \Sigma_{w_{\text{opt}}})$$

où $\Sigma_{\hat{w}}$ converge vers $\Sigma_{w_{\text{opt}}}$.

Choix adaptatif de w

- On prend un ensemble fini de mesures : $\mathscr{W}$
- Critère asymptotique :

$$\hat{w} = \arg\min_{w \in \mathscr{W}} \lim_{n} \hat{\mathbb{E}}\left[\|\hat{\theta}(w) - \theta_0\|^2\right]$$

- Alors $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{w})$.
- On a toujours :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}(\hat{w}) - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_{w_{\mathrm{opt}}})$$

où $\Sigma_{\hat{w}}$ converge vers $\Sigma_{w_{\mathrm{opt}}}$.

Choix adaptatif de w

- On prend un ensemble fini de mesures : $\mathscr{W}$
- Critère asymptotique :

$$\hat{w} = \arg\min_{w \in \mathscr{W}} \lim_n \hat{\mathbb{E}}\left[\|\hat{\theta}(w) - \theta_0\|^2 \right]$$

- Alors $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\hat{w})$.
- On a toujours :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}(\hat{w}) - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0, \Sigma_{w_{\mathrm{opt}}})$$

où $\Sigma_{\hat{w}}$ converge vers $\Sigma_{w_{\mathrm{opt}}}$.

Estimation de la partie non-paramétrique

Un développement de Taylor de $\hat{\mu}$ en θ_0 nous donne :

$$\hat{\mu}_{\hat{\theta}}(t,\hat{\theta}'x) = \hat{\mu}_{\theta_0}(t,\theta_0'x) + (\hat{\theta}-\theta_0)'\nabla_\theta\hat{\mu}_{\tilde{\theta}}(t,x),$$

pour $\tilde{\theta}$ compris entre θ_0 et $\hat{\theta}$.

Estimation de la partie non-paramétrique

Un développement de Taylor de $\hat{\mu}$ en θ_0 nous donne :

$$\hat{\mu}_{\hat{\theta}}(t, \hat{\theta}' x) = \hat{\mu}_{\theta_0}(t, \theta_0' x) + \underbrace{(\hat{\theta} - \theta_0)}_{=O_P(n^{-1/2})}{}' \nabla_\theta \hat{\mu}_{\tilde{\theta}}(t, x),$$

pour $\tilde{\theta}$ compris entre θ_0 et $\hat{\theta}$.

Estimation de la partie non-paramétrique

Un développement de Taylor de $\hat{\mu}$ en θ_0 nous donne :

$$\hat{\mu}_{\hat{\theta}}(t,\hat{\theta}'x) = \hat{\mu}_{\theta_0}(t,\theta_0'x) + \underbrace{(\hat{\theta}-\theta_0)}_{=O_P(n^{-1/2})}{}'\nabla_\theta \hat{\mu}_{\tilde{\theta}}(t,x),$$

pour $\tilde{\theta}$ compris entre θ_0 et $\hat{\theta}$.

Proposition

Soit Θ^* un voisinage de θ_0, et soit $\mathscr{T}$ un ensemble sur lequel $\sup_{\theta\in\Theta^*,t\in\mathscr{T},x\in\mathscr{X}} \|\nabla_\theta \mu_\theta(t,x)\| < \infty$. Alors,

$$\sup_{t,x,w} |\hat{\mu}_{\hat{\theta}}(t,\hat{\theta}'x) - \hat{\mu}_{\theta_0}(t,\theta_0'x)| = O_P(n^{-1/2}).$$

Plan

1. Introduction
2. Présentation du contexte
3. Méthode d'estimation
4. Résultats asymptotiques
5. Simulations

Modèle

Modèle de Poisson

$$\mu(t|x) = t(\theta_0' x + \text{cste}).$$

- $d = 4$, $n = 100$ et $\theta_0 = (1, 3.2, 2.5, 1.4)$.
- D et C suivent des lois de Weibull, de telle sorte que 30% des observations sont censurées en moyenne.
- En moyenne, on observe 20 évènements récurrents par personne.
- X suit une loi uniforme.

La mesure w et la fenêtre h sont choisis de façon adaptative.

Choix de h et de w

- On considère toutes les mesures w telles que :

$$\int_0^{T_{(n)}} f(t)dw(t) = \sum_{k \in \mathscr{V}} f(k)W(k)$$

où $\mathscr{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{12}\}$ et

$$W(k) = \begin{cases} 1 \quad \text{pour } k = v_1, \ldots, v_8 \\ 0.25, 0.5, 0.75 \text{ ou } 1 \text{ pour } k = v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}. \end{cases}$$

- $h \in \{h_1, \ldots, h_{25}\}$

Pour chaque h et chaque w on calcule $\hat{\theta}(w, h)$, puis on en déduit :

$$(\hat{w}, \hat{h}) = \arg\min_{w,h} \lim_n \hat{\mathbb{E}}\left[\|\hat{\theta}(w, h) - \theta_0\|^2\right].$$

Résultats

100 réplications d'échantillons de taille 100.
$\tilde{\theta}$: estimateur de θ_0 avec poids W tous égaux à 1.

	Biais	Variance	MSE
$\tilde{\theta}$	$\begin{pmatrix} 0.571 \\ 1.547 \\ 0.221 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.06 & 0.017 & -0.022 \\ 0.017 & 0.066 & -0.017 \\ -0.022 & -0.017 & 0.09 \end{pmatrix}$	0.2202
$\hat{\theta}$	$\begin{pmatrix} -0.01082890 \\ -0.03490086 \\ -0.03766846 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.025 & -0.002 & -0.006 \\ -0.002 & 0.026 & -0.002 \\ -0.006 & -0.002 & 0.032 \end{pmatrix}$	0.0864

Poids adaptatifs pour $\hat{\theta}$: $W(v_9) = 0.835,\ W(v_{10}) = 0.7025,$
$W(v_{11}) = 0.5925,\ W(v_{12}) = 0.49.$

Perspectives

- Performance de $\hat{\mu}_{\hat{\theta}}$
- Tester différents estimateurs de $\hat{\mu}_{\theta}$
- Résultats à distance finie
- Étude d'un modèle où l'index de la régression dépend du temps.

Bibliographie

- U. Einmahl, and D. Mason (2005). Uniform in bandwidth consistency of kernel-type function estimators. *Ann. Statist.*, 33(3) : 1380-1403, 2005.
- D. Ghosh, and D. Lin. Nonparametric analysis of recurrent events and death. *Biometrics*, 56 : 554-562, 2000.
- I. Gijbels and N. Veraverbeke. Sánchez Sellero. Almost sure asymptotic representation for a class of functionals of the Kaplan-Meier estimator. *Ann. Statist.*, 19(3) : 1457-1470, 1991.
- A. W. Van der Vaart, and J. A. Wellner. Weak convergence and empirical processes with applications to statistics. *Springer Series in Statistics. New York : Springer-Verlag.*, 1996.

- Merci de votre attention !

Bibliographie

- U. Einmahl, and D. Mason (2005). Uniform in bandwidth consistency of kernel-type function estimators. *Ann. Statist.*, 33(3) : 1380-1403, 2005.
- D. Ghosh, and D. Lin. Nonparametric analysis of recurrent events and death. *Biometrics*, 56 : 554-562, 2000.
- I. Gijbels and N. Veraverbeke. Sánchez Sellero. Almost sure asymptotic representation for a class of functionals of the Kaplan-Meier estimator. *Ann. Statist.*, 19(3) : 1457-1470, 1991.
- A. W. Van der Vaart, and J. A. Wellner. Weak convergence and empirical processes with applications to statistics. *Springer Series in Statistics. New York : Springer-Verlag.*, 1996.

- Merci de votre attention !